Pitanja iz geometrije za pismeni i usmeni (I smer, druga godina)

Tijana Šukilović, Jovana Ormanović

5. decembar 2022.

1 Teorijska pitanja

1. **Vektori**: Definicija vektora, kolinearni i koplanarni vektori, definicija sabiranja vektora, definicija množenja vektora brojem, osobine vektorskog prostora, linearna zavisnost i nezavisnost vektora (primeri), dokaz da su svaka tri vektora ravni linearno zavisna, baza i dimenzija vektorskog prostora, koordinate vektora i tačke, definicija skalarnog proizvoda, skalarni proizvod u ON bazi, računanje uglova i dužina pomoću skalarnog proizvoda, orijentacija ravni i prostora, definicija i geometrijska interpretacija vektorskog proizvoda, tablica vektorskog proizvoda u ON bazi, računanje vektorskog proizvoda, primene vektorskog proizvoda (računanje površine i određivanje orijentacije trougla, uslov da tačka P pripada trouglu ABC, uslov kolinearnosti tri tačke, tačke sa iste strane prave...), definicija mešovitog proizvoda, dokaz da je apsolutna vrednost mešovitog proizvoda jednaka zapremini paralelepipeda, računanje mešovitog proizvoda, primene mešovitog proizvoda (uslov koplanarnosti tri vektora, uslov koplanarnosti četiri tačke, određivanje zapremina paralelopipeda/tetraedra...), definicija centra mase, težište i centar mase trougla, formula za težište n-tačaka $P_1, \dots P_n$, baricentričke koordinate

2. **Transformacije koordinata i koordinatni sistemi**: Transformacije koordinata vektora, napisati opšte formule za transformacija koordinata tačaka i objasniti šta je šta, dva oblika formula za transformaciju koordinata ON repera i koji oblik šta predstavlja, polarne koordinate u ravni, cilindričke i sferne koordinate, rastojanja na sferi.

3. **Afine transformacije, projekcije i projektivna preslikavanja**: Definicija afinog preslikavanja, opšte formule afinog preslikavanja ravni, matrično predstavljanje afinog preslikavanja ravni 3×3 matricom, osobine afinih preslikavanja, šta je slika trougla (kvadrata, paralelograma, trapeza, kruga...) pri afinom preslikavanju, primeri afinih preslikavanja ravni (translacija, rotacija oko proizvoljne tačke, refleksija u odnosu na proizvoljnu pravu, skaliranje, homotetija, smicanje), opšte formule afinog preslikavanja prostora i matrični zapis 4×4 matricom, matrice rotacije za ugao θ oko koordinatnih osa, rotacija oko proizvoljne prave u prostoru, refleksija u odnosu na ravan, dve Ojlerove teoreme (Ojlerovi uglovi i veza između sopstvenih i svetskih rotacija), izometrije i kretanja (primeri), koji uslov mora da zadovoljava matrica kretanja (izometrije), definicija i osobine paralelnog i centralnog projektovanja, formule ortogonalne projekcije na koordinatne ravni, formule ortogonalne projekcije na proizvoljnu ravan, formule centralne projekcije iz tačke na ravan, primeri kartografskih projekcija, izvesti formule stereografske projekcije, osobine stereografske projekcije, homogene koordinate, veza između afinih

i homogenih koordinata, prave u projektivnoj ravni, definicija i osobine projektivnog preslikavanja, osnovna tema projektivne geometrije, šta je slika kvadrata/kruga pri projektivnom preslikavanju.

4. **Analitička geometrija ravni i prostora**: Jednačine prave u ravni (eksplicitna, implicitna, parametarska...), napisati parametarsku jednačinu duži $[AB]$, parametrizacija trougla i paralelograma, ispitati da li tačke leže u istoj poluravni, izvesti dve formule za rastojanje tačke od prave u ravni, presek implicitno zadatih pravih, presek parametarski zadatih pravih, presek duži, napisati parametarski i implicitnu jednačinu ravni, skicirati ravni date implicitnom jednačinom, ispitati da li tačke leže u istom poluprostoru, navesti i skicirati međusobne položaje dve ravni u prostoru, šta je i kako se određuje koordinatni sistem prilagođen datoj ravni α, napisati parametarsku (kanonsku) jednačinu prave u prostoru, pravu u parametarskom obliku zapisati kao presek dve ravni, navesti teoremu o pramenu ravni, navesti i skicirati međusobne položaje dve prave p i q u prostoru (napisati uslove u terminima $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{PQ}$), šta su mimoilazne prave, navesti teoremu o normali mimoilaznih pravih (primer kocke i tetraedra), navesti i skicirati međusobne položaje prave i ravni u prostoru, kako se određuje presek prave i trougla, kako se određuje presek ravni i trougla i šta može biti, napisati i dokazati formulu za rastojanje tačke od prave/ravni, napisati formulu za rastojanje mimoilaznih pravih, navesti formulu za ugao između dve prave/dve ravni/prave i ravni.

5. **Krive u ravni**: Šta je konusni presek i šta on može biti, šta je ekscentricitet i koliki je ekscentricitet elipse (kruga, hiperbole, parabole), Keplerovi zakoni i njihove posledice, napisati implicitnu i parametarsku jednačinu kruga poluprečnika r sa centrom u $C(x_0, y_0)$, šta predstavlja jednačina $x^2+y^2=1$ u ravni, a šta u prostoru, šta predstavlja jednačina $x^2+y^2=1, z=4$ u prostoru, napisati kanonsku jednačinu i parametrizaciju elipse (hiperbole), parametrizacija parabole (primer jednačine kosog hica), navesti i pokazati fokusne osobine elipse (hiperbole), navesti i nacrtati optičku osobinu elipse (parabole, hiperbole), napisati opšti oblik krive drugog reda, napisati sve kanonske oblike krivih drugog reda (i imena tih krivih), svesti krivu drugog reda na kanonski oblik translacijom (primer), svesti na kanonski oblik krivu $xy-1=0$ rotacijom, krive drugog reda u projektivnoj ravni, napisati definiciju Beizijerove krive stepena 2 i stepena 3, skicirati Bezijeove krive stepena 2 i 3 i njihove kontrolne tačke, matrična reprezentacija Bezijeove krive stepena 2, navesti osobine Bezijeovih krivih, pokazati da je svaka Bezijeova kriva stepena 2 deo parabole, nacrtati De Casteljau algoritam za krivu stepena 4 i neko $t \in [0,1]$ (na primer $t=0.3, t=0.5\dots$), kako se Bezijeova kriva stepena 2 (ili 3) deli na dve krive istog stepena u tački $t=0.4$ (nacrtati i reći koji su poligoni), pokazati korektnost De Casteljau algoritma na primerima krivih stepena 2 i 3, izvesti matrične formule za De Casteljau algoritam, kako se povećava stepen Bezijeove krive bez promene oblika, racionalne Bezijeove krive (primer kruga, elipse, hiperbole...) i njihove osobine, racionalni De Casteljau algoritam, primeri geometrijskih fraktala.

6. **Poligon i poligonska linija**: Definicija poligonske linije i poligona, definicija proste poligonske linije (nacrtati primer proste i složene), uslov da tačka pripada unutrasnjosti (nacrtati primer), definisati triangulaciju poligona, dokaz da svaki prost poligon sa više od 3 temena ima unutrašnju dijagonalu, formulacija i dokaz teoreme da se svaki prost poligon p moze triangulisati sa $n-2$ trougla (n je broj temena poligona p), Delonijeva triangluacija, dokazati formulu za računanje površine prostog poligona, definicija konveksnog skupa (nacrtati primer konveksnog i nekonveksnog skupa), šta je konveksni omotač nekog skupa (nacrtati primer),

šta je konveksni omotač skupa od n tačaka ravni (nacrtati primer), opisati algoritam reda $O(n^3)$ za određivanje konveksnog omotača, opisati Grahamov algoritam za konveksni omotač (primer).

7. **Poliedarske površi**: Definicija proste poliedarske površi, definicija ruba poliedarske površi, napisati tabelu povezanosti za kocku (tetraedar, oktaedar...), definisati orijentabilnost poliedarske površi, dokazati da je tetraedar (piramida, kocka, telo po izboru) orijentabilan, skicirati glatku Mebijusovu traku i njen poliedarski model, napisati tabelu povezanosti Mebijusove trake, dokazati da Mebijusova traka nije orijentabilna, nacrtati torus i njegov poliedarski model, definicija Ojlerove karakteristike, skicirati glatke površi roda 0, 1 i 2, definisati Platonovo telo, nabrojati Platonova tela, dokazati da postoji tačno 5 Platonovih tela, tabela sa brojem pljosni, ivica i temena Platonovih tela, dualna Platonova tela (skicirati).

2 Vektori

2.1 (*). U odnosu na tačku O dati su vektori položaja $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ tačaka A i B $(A \neq B)$. Izraziti vektor položaja tačke C takve da:
a) $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}, \lambda \in \mathbb{R}$; b) tačka C deli duž AB u odnosu $p : q,\ p, q \in \mathbb{N}$.

2.2. Dat je paralelogram $ABCD$. Neka je E središte stranice BC i S presek dijagonala AC i BD. Izraziti vektore $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{AE}$ i $\overrightarrow{AS}$.

2.3. Dati su vektori $\vec{v} = (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ i $\vec{u} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ iz $\mathbb{V}^3$ svojim koordinatama u ortonormiranoj bazi. Odrediti: a) $|\vec{v}|$; b) $\angle(\vec{v}, \vec{u})$.

2.4 (*). a) Ako je A_1 presek simetrale ugla $\angle BAC$ i ivice BC trougla ABC, odrediti vektor $\overrightarrow{AA_1}$ preko vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.
b) Dokazati da simetrala ugla u trouglu ABC deli naspramnu stranu u odnosu susednih strana.
c) Dokazati da se simetrale uglova trougla ABC seku u jednoj tački (centar upisanog kruga).

2.5 (*). Dokazati da se visine trougla seku u jednoj tački (ortocentar).

2.6. Odrediti površinu trougla ABC, ako je $A(4, 1)$, $B(-1, 3)$, $C(3, 2)$. Da li je trougao ABC pozitivne orijentacije?

2.7. Ispitati da li tačka $M(-2, 3)$ pripada trouglu ABC, ako je $A(1, 4)$, $B(-1, 3)$, $C(2, -3)$?

2.8. a) Odrediti mešoviti proizvod $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$, ako su njihove koordinate u ortonormiranoj bazi $\vec{v} = (-2, 1, 4)$, $\vec{u} = (0, 2, 3)$, $\vec{w} = (5, 1, -2)$.
b) Da li su ti vektori linearno nezavisni?

2.9. a) Da li su tačke $A(-2, 1)$, $B(-1, 2)$, $C(4, 5)$ kolinearne?
b) Da li su tačke $A(1, 4, 2)$, $B(2, 5, 3)$, $C(7, -4, 4)$, $D(5, -6, 2)$ koplanarne?

2.10. Data je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ivice 1.
a) Odrediti ugao između dijagonala strana kocke BC_1 i D_1B_1.
b) Odrediti zapreminu tetraedra BC_1B_1D.

2.11 (*). Neka je ABC trougao i T tačka takva da važi $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

a) Dokazati da tačka T ne zavisi od izbora tačke O.
b) Dokazati da je tačka T težište trougla, tj. presek težišnih duži i da ona težišne duži deli u odnosu $2:1$.

2.12. Jedan kraj poluge dugačke 5 m drži roditelj, a drugi je oslonjen na zemlju. Dete mase 15 kg sedi na 2 m od oslonca (tj. drugog kraja poluge). Koliku masu drži roditelj?

2.13. Sportski ribolovac je harpunom ulovio veliku belu ajkulu. Ajkula je neko vreme pružala otpor, ali se onda umirila na udaljenosti $120m$ od broda. Ribolovac povlači ajkulu užetom privezanim za harpun, pri čemu se brod (iz početnog stanja mirovanja) pomera $24m$ u pravcu ajkule. Kolika je masa ajkule ako je masa broda $3t$? Zanemariti otpor sredine.

2.14. U ravni je dat trougao ABC. Neka tačka D pripada stranici AB, a tačka E stranici BC, tako da je $\frac{AD}{DB}=\frac{3}{4}$ i $\frac{BE}{EC}=\frac{5}{7}$. Ako se duži AE i CD seku u tački F odrediti u kom odnosu tačka F deli duži AE i CD.

2.15. Odrediti baricentričke koordinate tačke F u odnosu na tačke A, B, C iz prethodnog zadatka.

2.16. U ravni su date tačke $A(2,-4)$, $B(1,-1)$ i $C(-1,1)$. Odrediti baricentričke koordinate tačaka $D(1,2)$, $E(0,0)$ i $F(1,-2)$ u odnosu na trougao ABC. Koje od tih tačaka se nalaze **unutar** trougla?

3 Afina preslikavanja

3.1 Transformacije koordinata

3.1. Dat je pravilan šestougao $ABCDEF$. Ako je data baza $e=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$, $\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{FE}$, odrediti koordinate temena šestougla u reperu $F\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$.

3.2. Neka je $OABC$ paralelogram i $e=(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})$, $f=(\frac{1}{2}\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BC})$ dve baze. Odrediti formule transformacija koordinata iz repera Oe u reper Bf, kao i inverzne formule.

3.3. Da li formule

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

prestavljaju transformaciju koordinata između dva ortonormirana repera? Precizno nacrtati uzajamni položaj tih repera.

3.2 Afina preslikavanja

3.4. Date su tačke $A(-1,-1)$, $B(1,-1)$, $C(1,1)$, $D(-1,1)$; $A'(4,5)$, $B'(8,7)$, $C'(6,9)$, $D'(2,7)$.
a) Odrediti jednačine afinog preslikavanja koje kvadrat $ABCD$ preslikava u paralelogram $A'B'C'D'$.
b) Izračunati površinu paralelograma, koristeći determinantu matrice dobijenog preslikavanja i površinu kvadrata.

3.5. Dato je afino preslikavanje formulama

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Odrediti formule inverznog preslikavanja.

3.6. Odrediti formule afinog preslikavanja koje trougao OAB preslikava u trougao $O'A'B'$, ako je $O(0,0),\ A(1,0),\ B(0,1)$ i $O'(5,-4),\ A'(7,-8),\ B'(4,1)$.
a) Da li preslikavanje čuva orjentaciju?
b) Izračunati površinu trougla $O'A'B'$ (znajući da je $P(\triangle OAB) = 1/2$ i znajući determinantu preslikavanja).

3.7. Odrediti formule afinog preslikavanja koje trougao PQR preslikava u trougao $P'Q'R'$, ako je $P(1,1),\ Q(1,2),\ R(4,4)$ i $P'(5,-4),\ Q'(7,-8),\ R'(4,1)$. Da li preslikavanje čuva orjentaciju?

3.8. a) Da li su trouglovi PQR i $P'Q'R'$ podudarni ako je $P(0,0),\ Q(5,5),\ R(10,-15)$ i $P'(1,-7)$, $Q'(0,0)$ i $R'(19,-8)$.
b) Odrediti izometriju koja preslikava PQR u $P'Q'R'$. O kojoj se izometriji radi?

3.9. Odrediti formule homotetije sa centrom u tački $C(1,2)$ i koeficijentom -2. U koju tačku se preslikava koordinatni početak pri ovoj homotetiji? (Napomena: rezultat, tj. formule zapisati u obliku: $x' = \ldots$, $y' = \ldots$)

3.10. Odrediti formule rotacije za ugao $\phi = \frac{2\pi}{3}$ oko tačke $A(-2,3)$. U koju tačku se preslikava tačka $M(1,3)$ pri ovoj rotaciji? (Napomena: rezultat, tj. formule zapisati u obliku: $x' = \ldots$, $y' = \ldots$)

3.11. Korisnik je obeležio pravougaonik (recimo sliku) sa naspramnim temenima $P(360,420)$ i $Q(520,520)$. Odrediti formule afine transformacije koja taj pravougaonik preslikava na ceo ekran dimenzija 800×600 bez distrozije, tj. homotetijom.

3.12. Odrediti formule refleksije u odnosu na pravu $3x - 4y - 6 = 0$ u ravni.

3.13. Odrediti formule rotacije za ugao $\phi = \frac{\pi}{2}$ oko prave $p:\ P(-1,0,0), \vec{p}(2,1,2)$.

3.14. Odrediti normalnu projekciju prave $p: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{2}$ na ravan $\alpha: 2x + y - 4z + 5 = 0$.

3.15. Odrediti tačku Q koja je simetrična tački $P(3,-2,-4)$ u odnosu na ravan $\alpha: 6x + 2y - 3z - 75 = 0$ kao i projekciju P' tačke P na ravan α.

3.16. Odrediti tačku Q koja je simetrična tački $P(-1,-2,1)$ u odnosu na pravu $l: \frac{x}{-2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{1}$ kao i projekciju P' tačke P na pravu l.

3.17. Odrediti centralnu projekciju tačke $P(1,2,3)$ na ravan $z = -1$, ako je centar projektovanja tačka $O(0,0,0)$.

3.18. Odrediti formule stereografsku projekciju iz južnog pola jedinične sfere na ravan $z = 0$. Šta je slika tačke tačke $P(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3})$?

3.19. Izračunati rastojanje između tačaka $A(60°\ N, 30°\ E)$ i $B(30°\ S, 60°\ W)$ na sferi.

4 Analitička geometrija

4.1 Geometrija ravni

4.1. Data je prava $q: x = 3t - 4, y = 2t + 1, t \in \mathbb{R}$.
a) Odrediti implicitni oblik prave q.
b) Odrediti implicitni oblik prave r koja sadrži tačku $R(3,7)$ i paralelna je q.

4.2. Odrediti jednačinu normale n iz tačke $A(1,5)$ na pravu p ako je:
a) $p: x = t+4, y = 3t-5, t \in \mathbb{R}$ b) $p: 4x - \frac{2}{3}y + 7 = 0$.

4.3. Neka je $A(2,3), B(-1,4)$.
a) Odrediti parametarsku jednačinu prave AB.
b) Ispitati da li tačka $C(14,-1)$ pripada polupravoj $[AB)$.
c) Ispitati da li tačka $D(1, \frac{10}{3})$ duži $[AB]$ i u kom odnosu je deli.

4.4. Ispitati da li tačke $C(1,1)$ i $D(-7,11)$ pripadaju istoj poluravni određenoj pravom AB, $A(2,-2)$, $B(1,3)$.

4.5. Ako je $A(1,2), B(3,7)$, odrediti koordinate tačaka koje dele duž AB na pet jednakih delova.

4.6. Izračunati rastojanje tačke $M(1,-3)$ od prave a) $4x-3y+1=0$, b) prave p čiji je vektor pravca $\vec{p} = (3,-2)$, a tačka $P(1,0)$.

4.7. Odrediti centar i poluprečnik opisanog kruga oko trougla ABC, ako je $A(0,3), B(3,4), C(5,1)$ kao i koordinate težišta trougla.

4.8. Odrediti težište T, ortocentar H i centre opisanog O i upisanog kruga S u $\triangle ABC$, $A(-1,4)$, $B(2,3)$, $C(1,2)$. Odrediti baricentričke koordinate ovih tačaka.

4.9. Odrediti presek pravih p i q koje su zadate tačkom i vektorom pravca:
a) $P(1,-2)$, $\vec{p} = (1,2)$, $Q(2,1)$, $\vec{q} = (1,1)$;
b) $P(1,-2)$, $\vec{p} = (0,1)$, $Q(2,1)$, $\vec{q} = (0,-2)$;
c) $P(1,-2)$, $\vec{p} = (-1,-3)$, $Q(2,1)$, $\vec{q} = (1,3)$.

4.2 Prava i ravan u prostoru

4.10. Ravni $x+2y-4z+3=0$ odrediti parametarski jednačinu.

4.11. Odrediti jednačinu ravni koja sadrži tačke $A(1,2,3)$, $B(1,-2,1)$ i $C(0,0,1)$.

4.12. Odrediti ortonormirani koordinatni sistem (x', y', z') u odnosu na ravan $\alpha: x+2y-2z+5=0$ (tj. koordinatni sistem $O'x'y'z'$ u kom ravan α ima jednačinu $z'=0$) i napisati vezu tih koordinata sa koordinatama (x,y,z).

4.13. Pravu $p: x = 3t+4, y = -2t+1, z = t-2, t \in \mathbb{R}$ zapisati kao presek dve ravni.

4.14. Odrediti jednačinu ravni α koja sadrži pravu $p: \frac{x-2}{1} = \frac{y-11}{5} = \frac{z-2}{1}$ i koja je normalna na ravan $\beta: y=0$.

4.15. Pravu $p: x+y-3=0, z-2x=0$ zapisati parametarski.

4.16. Odrediti rastojanje tačke $M(1,4,-3)$ od: a) prave $p: x-y-1=0, z-2x=0$, b) ravni $\alpha: 2x-y+4z=0$.

4.17. Data je ravan $\alpha: x-2y+5z-1=0$. Odrediti presek te ravni sa pravama:
a) $p: \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{7} = \frac{z}{1}$; b) $q: \frac{x}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-1}$; c) $r: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-1}$;
d) $s: x-y=1, x+y-z+5=0$; e) $t: x-z+2=0, -y+3z+2=0$.

4.18. Odrediti tačku prodora prave $p: \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-5}{-4}$ kroz ravan $\alpha: 3x+y+5z-7=0$.

4.19. Odrediti jednačinu familije svih ravni koje sadrže tačku $P(5,-2,1)$ i paralelne/normalne su na pravu $q: \frac{x+1}{-2} = \frac{y+4}{0} = \frac{z-2}{1}$.

4.20. Odrediti jednačinu ravni koja sadrži pravu $p: x+y+z=0, 2x-2z+3=0$ i sa ravni $\alpha: x-4y-8z+12=0$ gradi ugao od $\frac{\pi}{4}$.

4.21. Odrediti jednačinu ravni α koja sadrži pravu $p: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{1}$ i čije je rastojanje od tačke $M(1,0,-1)$ jednako $\sqrt{6}$.

4.22. Odrediti međusobni položaj pravih (i presečnu tačku ako postoji):
a) $p: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1}$ $\quad q: 2x = y,\ 3x = z$
b) $p: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1}$ $\quad q: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$
c) $p: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1}$ $\quad q: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+7}{2}$

4.23. Odrediti zajedničku normalu i rastojanje između mimoilaznih pravih $p: \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-12}{-1}$ i $q: \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$.

4.24. Izračunati (koristeći digitron za arccos) ugao između ravni $\alpha: x+2y-3z-1=0$ i $\beta: 2x-3y+4z+2=0$.

4.25. Izračunati (koristeći digitron za arccos) ugao između prave $p: x+2y-3z-1=0, x-z+2=0$ i ravni $\alpha: x-4y+2z+2=0$.

4.26. Odrediti jednačinu normale iz tačke $A(2,1,-3)$ na ravan $\alpha: 2x-4y+z+5=0$.

4.27. Odrediti λ tako da se prave $p: \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-1}{-2}$ i $q: \frac{x-\lambda}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{0}$ seku. Koje su koordinate presečne tačke?

4.28. Odrediti jednačinu prave koja sadrži tačku $L(2,-1,7)$ i seče prave $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{1}$ i $q: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-11}{-3} = \frac{z+2}{0}$.

4.29. Ispitati da li prava $p: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2}$ seče trougao ABC, ako je $A(2,4,6)$, $B(-4,2,0)$, $C(6,4,-2)$. U slučaju da seče, odrediti koordinate presečne tačke.

4.30. Odrediti presek ravni $\alpha: -x+y+2z-3=0$ i trougla ABC, ako je $A(-2,1,0)$, $B(2,-1,3)$, $C(1,2,3)$.

5 Krive u ravni

5.1. Odrediti centar i poluprečnik kruga $k: x^2+y^2-2x+4y-11=0$, a zatim odrediti njegovu parametrizaciju duzhinom luka s.

5.2. Odrediti presek kruga k iz prethodnog zadatka i prave:
a) $p: \vec{p} = (1,1),\ P(2,-2)$ $\qquad$ b) $q: x-y-4=0$.

5.3. Odrediti presek krugova $\kappa:\ (x-4)^2+(y-3)^2=25$ i $\ell:\ x=-1+4\cos t,\ y=-1+4\sin t$, $t\in[0,2\pi)$.

5.4. Svesti na kanonski oblik translacijom sledeće krive:
a) $3y^2+6y-x-1=0$; b) $x^2+25y^2-6x+50y+9=0$; c) $y^2-36x-2y-35=0$.

5.5. Rotacijom pokazati da je kriva $xy - 1 = 0$ hiperbola.

5.6. Teniser visine $1.8m$ servira sa osnovne linije. Ako je početna brzina udarca $180km/h$, pod kojim početnim uglom treba udariti loptu da bi ona završila u polju protivnika? Dužina terena je $23.77m$, a visina mreže $91.4cm$.

5.7. Kola su sletela sa litice visine $10m$ i nađena su na udaljenosti od $15m$ od nje. Kolikom su se brzinom (u km/h) kola kretala pre pada?

5.8. Ekcentricitet Jupitera je ~ 0.05, a veća poluosa $\sim 5AJ$. Odrediti najmanje (perihel) i najveće (afel) rastojanje Jupitera od Sunca. Koliko godina je potrebno Jupiteru da obiđe oko Sunca?

5.9. Odrediti Bezijeovu krivu čije su kontrolne tačke $P_0(1,1)$, $P_1(2,2)$, $P_2(4,-1)$.

5.10. Date su tačke $P_0 = (2,3), P_1 = (-1,4), P_2 = (3,0), P_3 = (1,-2)$.
a) Odrediti Bezijeovu krivu $\alpha_3(t), t \in [0,1]$ čije su to kontrolne tačke.
b) Odrediti tangentne vektore u tačkama P_0 i P_3.
c) Da li je tangenta te krive u tački $\alpha(\frac{1}{2})$ paralelna pravoj P_0P_3?
d) Odrediti krivu dobijenu pomeranjem kontrolne tačke P_2 za vektor $\overrightarrow{v} = (-7,-11)$. Da li je tangenta te nove krive u tački $\alpha'_3(\frac{1}{2})$ paralelna pravoj P_0P_3?

5.11. U ravni su date tačke $P_0 = (2,1), P_1 = (6,13), P_2 = (14,-7)$ i prave $p:\ y = 5$ i $r:\ x = 2+3s,\ y = 12-2s,\ s \in \mathbb{R}$.
a) Napisati Bezijeovu krivu $\alpha_2(t), t \in [0,1]$ čiji je kontrolni poligon $P_0P_1P_2$.
b) Odrediti presek kontrolnog poligona sa pravama p i r.
c) Odrediti presek krive $\alpha_2(t), t \in [0,1]$ sa pravama p i r. Uporediti broj presečnih tačaka sa slučajem kontrolnog poligona (svojstvo najmanje varijacije).
d) Pokazati da je kriva $\alpha_2(t), t \in [0,1]$ deo parabole $y^2 = 4x$ (svojstvo afine invarijantnosti).

5.12. Upotrebom de Casteljau algoritma odrediti tačku Bezijeove krive $\alpha_4(t)$ za $t = \frac{1}{3}$, ako su kontrolne tačke krive $P_0(5,-4), P_1(-13,14), P_2(5,50), P_3(32,41), P_4(14,15)$.

5.13. Data je Bezijeova kriva kontrolnim tačkama $P_0 = (0,-2), P_1 = (-2,4), P_2 = (0,10), P_3 = (6,8)$.
a) Podeliti krivu na dva dela praveći rez u tački $\alpha_3(\frac{1}{2})$.
b) Povećati stepen "leve" krive za 1.

5.14. Predstaviti deo kruga $x = \sqrt{2}\cos\theta,\ y = \sqrt{2}\sin\theta,\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right]$ kao racionalnu Bezijeovu krivu.

5.15. Da li se deo hiperbole $x^2 - y^2 = 1$ može predstaviti kao racionalna Bezijeova kriva?

6 Konveksni omotač i triangulacija poligona

6.1. Odrediti konveksni omotač tačaka $P_0 = (3,3),\ P_1 = (0,0),\ P_2 = (-1,5),\ P_3 = (6,2),\ P_4 = (3,1),\ P_5 = (8,4),\ P_6 = (4,-3),\ P_7 = (7,5),\ P_8 = (7,-1)$.

6.2. U ravni su date tačke $P_0 = (-3,1), P_1 = (-2,2), P_2 = (-5,6), P_3 = (0,3), P_4 = (-4,7)$. Ispitati da li je poligon $P_0P_1P_2P_3P_4$ prost. Ako nije, sortirati tačke $P_0, \ldots P_4$ tako da poligon bude prost.

6.3. Od datih tačaka u ravni formirati prost poligon, a zatim ga triangulisati.
a) $P_0 = (0,0), P_1 = (-1,5), P_2 = (2,3), P_3 = (4,6), P_4 = (3,-1)$
b) $P_0 = (-1,3), P_1 = (2,1), P_2 = (0,0), P_3 = (4,-1), P_4 = (5,3), P_5 = (3,4)$.

7 Poliedarske površi

7.1. a) Iz tabele povezanosti odrediti skup ivica. b) Nacrtati sliku. c) Proveriti da li ta tabela povezanosti zadaje apstraktnu poliedarsku površ. d) U slučaju potvrdnog odgovora pod c) proveriti da li je ta poliedarska površ povezana. e) Odrediti rub te površi i broj komponenata ruba.

za sledeće tabele povezanosti:
i) $\mathcal{T} = \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$, $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$,
$p_0 = \langle 0,1,2 \rangle$, $p_1 = \langle 0,2,4,5 \rangle$, $p_2 = \langle 3,2,0 \rangle$, $p_3 = \langle 1,0,3 \rangle$.
ii) $\mathcal{T} = \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}\}$, $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$,
$p_0 = \langle 0,1,7,4 \rangle$, $p_1 = \langle 1,2,6,7 \rangle$, $p_2 = \langle 2,3,5,6 \rangle$, $p_3 = \langle 3,0,4,5 \rangle$, $p_4 = \langle 8,9,10 \rangle$.

7.2. a) Nacrtati poliedarski model Mebijusove trake i napisati mu tabelu povezanosti. b) Dokazati da je Mebijusova traka neorjentabilna.

7.3. Izvršiti usklađivanje orjentacija pljosni kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ako je izabrana orjentacija pljosni $p_0 = \langle A, B, C, D \rangle$.

7.4. Data je poliedarska površ $p_0 = \langle 0,1,4,3 \rangle$, $p_1 = \langle 1,2,5,4 \rangle$, $p_2 = \langle 2,0,3,5 \rangle$, $p_3 = \langle 6,8,5,3 \rangle$, $p_4 = \langle 6,3,4,7 \rangle$, $p_5 = \langle 4,5,8,7 \rangle$, $p_6 = \langle 8,7,1,2 \rangle$, $p_7 = \langle 0,1,7,6 \rangle$, $p_8 = \langle 0,6,8,2 \rangle$.
a) Dokazati da je ona poliedar, tj. da nema rub.
b) Izračunati njenu Ojlerovu karakterisku i rod.

7.5. Odrediti Ojlerovu karakteristiku Mebijusove trake.

7.6. Odrediti odnos zapremina tetraedra i njemu dualnog tela. Skicirati!

7.7. Dat je tetraedar $ABCD$ ivice 2. Izračunati zapreminu oktaedra čija su temena središta ivica datog tetraedra. Skicirati!