3.2. ТЕОРЕМА О ЕКСТРЕМАЛНИМ ТИПОВИМА

УВОДНЕ НАПОМЕНЕ

Нека је (X_n) стационаран случајан низ и M_n максимум првих n чланова тог низа, тј.

$$M_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}.$$

Претпоставимо да за неке низове константи $a_n > 0$ и $b_n \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, неку недегенерисану функцију расподеле G и сваки $x \in C(G)$ важи

$$\lim_{n\to\infty} P\{M_n \leqslant a_n x + b_n\} = G(x). \tag{3.2.1}$$

Тада за сваки природан број $k \geqslant 2$ и сваки $x \in C(G)$ важи и

$$\lim_{n\to\infty} P\{M_{nk} \leqslant a_{nk} x + b_{nk}\} = G(x). \tag{3.2.2}$$

Докажимо прво следећу једноставну лему:

ЛЕМА 3.2.1. *Претпоставимо да важи* (3.2.1). *Ако за сваки природан број* $k \geqslant 2$ *и сваки* $x \in C(G)$ *при* $n \to \infty$ *важи*

$$P\{M_{nk} \leqslant a_{nk} x + b_{nk}\} - P^k\{M_n \leqslant a_{nk} x + b_{nk}\} \to 0, \tag{3.2.3}$$

онда је G *функција расподеле екстремних вредности, тј. припада фамилији Гумбелових, Фрешеових или Вејбулових расподела.*

Доказ. Ако важи (3.2.1), онда важи и (3.2.2). Зато из (3.2.3) добијамо да за сваки природан број $k \geqslant 2$, при $n \to \infty$ важи

$$P^k\{M_n \leqslant a_{nk} x + b_{nk}\} \to G(x), \quad P\{M_n \leqslant a_{nk} x + b_{nk}\} \to G^{1/k}(x),$$

тј. постоји низ функција расподеле (F_n), такав да при $n \to \infty$ важи

$$F_n(a_{nk} x + b_{nk}\} \to_w G^{1/k}(x).$$

На основу теореме 2.4.1 следи да је $G(x)$ М-стабилна расподела, а на основу теорема 2.4.3 и 2.5.1 добијамо да $G(x)$ припада класи расподела екстремних вредности. ■

Основни резултат који ће бити доказан у овом параграфу јесте теорема о екстремалним типовима за стационарне случајне низове, која представља уопштење одговарајуће теореме за низове независних случајних величина. Та теорема тврди да при одређеним условима слабе зависности за низ (X_n), функција $G(x)$ из (3.1.1) јесте M-стабилна, што је еквивалентно тврђењу да је $G(x)$ нека од функција расподеле екстремних вредности.

МАКСИМУМИ НА ДИСЈУНКТНИМ СКУПОВИМА

Од услова слабе зависности наведених у одељку 3.1 у теорији екстремних вредности стационарних случајних низова најче7ће се користи услов $D(u_n)$. Значај овог услова и начин његовог кори7ћења илустроваћемо теоремом која говори о степену зависности максимума стационарног случајног низа на дисјунктним скуповима, при чему растојање између тих скупова није мање од датог броја. За сваки природан број n означимо $\mathbf{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$, а за сваки коначан подскуп A скупа природних бројева нека је

$$M(A) = \max\{X_i : i \in A\}.$$

ТЕОРЕМА 3.2.1. [Leadbetter (1974)] *Нека је (X_n) стационаран случајан низ и (u_n) низ реалних бројева, такав да важи услов $D(u_n)$. За фиксиране бројеве n, k и l нека су $A_1, A_2, \dots, A_k \subset \mathbf{N}_n$ дисјунктни скупови, такви да за произвољне r и s, где је $r \in A_i$, $s \in A_j$ и $i \neq j$, важи $|r - s| \geqslant l$. Тада важи неједнакост*

$$\left| P\left(\bigcap_{i=1}^{k} \{M(A_j) \leqslant u_n\} \right) - \prod_{i=1}^{k} P\{M(A_j) \leqslant u_n\} \right| \leqslant (k-1)\alpha_{n,l}. \qquad (3.2.4)$$

Доказ индукцијом по k. За $k = 2$ неједнакост (3.2.4) се своди на услов $D(u_n)$. Претпоставимо да неједнакост (3.2.4) важи за произвољних $k - 1$ скупова, таквих да растојање међу њима није мање од l.

Размотримо сада k скупова $A_1, A_2, \dots, A_k \subset \mathbf{N}_n$ за које важи услов теореме. Означимо

$$B_i = \{M(A_i) \leqslant u_n\}, \quad i \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Коришћењем услова $D(u_n)$ и индуктивне претпоставке добијамо

$$\begin{aligned}
\Delta &:= |P(B_1 B_2 \dots B_k) - P(B_1)P(B_2)\dots P(B_k)| \\
&\leqslant |P(B_1 B_2 \dots B_{k-1} B_k) - P(B_1 B_2 \dots B_{k-1}) P(B_k)| \\
&+ |P(B_1 B_2 \dots B_{k-1}) - P(B_1)P(B_2)\dots P(B_{k-1})| \cdot P(B_k) \\
&\leqslant \alpha_{n,l} + (k-2)\alpha_{n,l} = (k-1)\alpha_{n,l}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

ОСНОВНО ПОМОЋНО ТВРЂЕЊЕ

У доказу теореме о екстремалним типовима за строго стационарне случајне низове основну улогу има следеће помоћно тврђење:

ТЕОРЕМА 3.2.2. [Leadbetter (1974)] *Нека је* (X_n) *строго стационаран случајан низ и* (u_n) *низ реалних бројева, такав да важи услов* $D(u_n)$. *Тада за сваки фиксиран природан број* $k \geqslant 2$ *при* $n \to \infty$ *важи:*

$$P\{M_n \leqslant u_n\} - P^k\{M_{[n/k]} \leqslant u_n\} \to 0, \tag{3.2.5}$$

$$P\{M_{nk} \leqslant u_{nk}\} - P^k\{M_n \leqslant u_{nk}\} \to 0. \tag{3.2.6}$$

Доказ. За сваки природан број n означимо $\mathbf{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Нека је k фиксиран природан број и $m = [n/k]$. За велике вредности природног броја n можемо изабрати природан број l, тако да важи неједнакост $k < l < m$. Нека је

$$N_{mk} = (I_1 \cup J_1) \cup (I_2 \cup J_2) \cup \cdots \cup (I_k \cup J_k)$$

разбијање скупа $N_{mk} = \{1, 2, \ldots, mk\}$ на дисјунктне скупове тако да су испуњени следећи услови:

• Сваки од међусобно дисјунктних скупова I_1, J_1, I_2, J_2, $\ldots$, I_k, J_k састоји се од узастопних природних бројева;
• Важе једнакости

$$|I_1| = |I_2| = \cdots = |I_k| = m - l, \quad |J_1| = |J_2| = \cdots = |J_k| = l,$$

• Скупови I_1, J_1, I_2, J_2, $\ldots$, I_k, J_k поређани су у записаном редоследу, односно:

скуп I_1 садржи првих $m - l$ природних бројева;
скуп J_1 садржи следећих l природних бројева;
скуп I_2 садржи следећих $m - l$ природних бројева;
скуп J_2 садржи следећих l природних бројева; итд.

Како је $mk \leqslant n < (m+1)k$, то је $|\mathbf{N}_n \setminus \mathbf{N}_{mk}| < k < l$. Одредимо још скупове I_{k+1} и J_{k+1} на следећи начин:

$$I_{k+1} = \{mk + 1, mk + 2, \ldots, (m+1)k\},$$

$$J_{k+1} = \{mk, mk - 1, \ldots, mk - m + l + 1\}.$$

Тада важе једнакости $|I_{k+1}| = l$, $|J_{k+1}| = m - l$. Скуп I_{k+1} садржи разлику $\mathbf{N}_n \setminus \mathbf{N}_{mk}$, а скуп J_{k+1} садржан је у скупу $\mathbf{N}_{mk}$. У даљем ћемо користити да су максимуми на интервалима I_1, I_2, $\ldots$, I_k слабо зависни, а да се мали интервали J_1, J_2, $\ldots$, J_k, J_{k+1} могу занемарити.

Означимо $\Delta = P\{M_n \leqslant u_n\} - P^k\{M_{[n/k]} \leqslant u_n\}$. Тада важи једнакост

$$\begin{aligned}\Delta = &-\left\{P\left(\bigcap_{s=1}^{k}\{M(I_s) \leqslant u_n\}\right) - P\{M_n \leqslant u_n\}\right\}\\ &+\left\{P\left(\bigcap_{s=1}^{k}\{M(I_s) \leqslant u_n\}\right) - P^k\{M(I_1) \leqslant u_n\}\right\}\\ &+\left(P^k\{M(I_1) \leqslant u_n\} - P^k\{M_{[n/k]} \leqslant u_n\}\right). \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Процениhемо сваку од разлика на десној страни неједнакости (3.2.7). Тачније доказаhемо да важе неједнакости:

$$0 \leqslant P\left(\bigcap_{s=1}^{k}\{M(I_s) \leqslant u_n\}\right) - P\{M_n \leqslant u_n\} \leqslant (k+1)P\{M(I_1) \leqslant u_n < M(J_1)\}, \tag{3.2.8}$$

$$\left|P\left(\bigcap_{s=1}^{k}\{M(I_s) \leqslant u_n\}\right) - P^k\{M(I_1) \leqslant u_n\}\right| \leqslant (k-1)\alpha_{n,l}, \tag{3.2.9}$$

$$|P^k\{M(I_1) \leqslant u_n\} - P^k\{M_{[n/k]} \leqslant u_n\}| \leqslant kP\{M(I_1) \leqslant u_n < M(J_1)\}. \tag{3.2.10}$$

Означимо $D = \left(\bigcap_{s=1}^{k}\{M(I_s) \leqslant u_n\}\right) \setminus \{M_n \leqslant u_n\}$. Тада важи

$$\begin{aligned} D &\subset \left(\bigcup_{s=1}^{k}\{M(I_s) \leqslant u_n < M(J_s)\}\right) \cup \{M_{mk} \leqslant u_n < M(J_{k+1})\}\\ &\subset \left(\bigcup_{s=1}^{k+1}\{M(I_s) \leqslant u_n < M(J_s)\}\right). \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Како је (X_n) строго стационаран случајан низ, то вероватноће догађаја $\{M(I_s) \leqslant u_n < M(J_s)\}$ не зависе од s. Имајући то у виду, добијамо да неједнакост (3.2.8) следи из (3.2.11). Неједнакост (3.2.9) следи из теореме 3.2.1, јер вероватноће догађаја $\{M(I_s) \leqslant u_n\}$ (такође због стационарности) не зависе од s.

Приметимо да за $x, y \in [0,1]$ важи неједнакост $|x^k - y^k| \leqslant k|x-y|$. Користећи ту чињеницу, добијамо да је

$$\begin{aligned} &|P^k\{M(I_1) \leqslant u_n\} - P^k\{M_{[n/k]} \leqslant u_n\}|\\ &\leqslant k \cdot |P\{M(I_1) \leqslant u_n\} - P\{M_{[n/k]} \leqslant u_n\}|\\ &= kP\{M(I_1) \leqslant u_n < M(J_1)\}, \end{aligned}$$

и тиме је доказана неједнакост (3.2.10).

Нека су k и r фиксирани природни бројеви, $l > k$ и $n \geqslant (2r+1)kl$. Тада можемо изабрати дисјунктне подскупове A_1, A_2, …, A_r скупа $\{1, 2, \dots, [n/k] - l\}$, тако да важи:

• Сваки од међусобно дисјунктних скупова A_1, A_2, …, A_r састоји се од l узастопних природних бројева;
• Ако $s \in A_i$, $t \in A_j$, где је $i \neq j$, онда важи $|s-t| \geqslant l$;
• За сваки $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ и сваки $s \in A_j$ важи $[n/k] - l + 1 - s \geqslant l$, тј. растојање између сваког од скупова A_1, A_2, …, A_r и скупа J_1 није мање од l.

Уведимо следеће ознаке:

$$p = P\{M(I_1) \leqslant u_n < M(J_1)\}, \quad q = P\{M(J_1) \leqslant u_n\}.$$

Пошто се сваки од скупова A_1, A_2, …, A_r, J_1 састоји од l узастопних природних бројева, то из стационарности низа (X_n) добијамо да за све $s \in \{1, 2, \ldots, r\}$ важи

$$P\{M(A_s) \leqslant u_n\} = P\{M(J_1) \leqslant u_n\} = q. \tag{3.2.12}$$

Коришћењем теореме 3.2.1 и једнакости (3.2.12) добијамо

$$\begin{aligned} p &\leqslant P\{M(A_1) \leqslant u_n, \ldots, M(A_r) \leqslant u_n, M(J_1) > u_n\} \\ &= P\{M(A_1) \leqslant u_n, \ldots, M(A_r) \leqslant u_n\} \\ &\quad -P\{M(A_1) \leqslant u_n, \ldots, M(A_r) \leqslant u_n, M(J_1) \leqslant u_n\} \\ &\leqslant \left| P\left(\bigcap_{s=1}^{r} \{M(A_s) \leqslant u_n\} \right) - q^r \right| + q^r - q^{r+1} \\ &\quad + \left| q^{r+1} - P\left\{ \left(\bigcap_{s=1}^{r} \{M(A_s) \leqslant u_n\} \right) \cap M(J_1) \leqslant u_n \right\} \right| \\ &\leqslant (r-1)\alpha_{n,l} + q^r - q^{r+1} + r\alpha_{n,l} \end{aligned}$$

и коначно

$$p = P\{M(I_1) \leqslant u_n < M(J_1)\} \leqslant q^r - q^{r+1} + (2r-1)\alpha_{n,l}. \tag{3.2.13}$$

Користећи неједнакости (3.2.8), (3.2.9), (3.2.10) и (3.2.13), добијамо

$$\begin{aligned} |\Delta| &= |P\{M_n \leqslant u_n\} - P^k\{M_{[n/k]} \leqslant u_n\}| \\ &\leqslant (2k+1)P\{M(I_1) \leqslant u_n < M(J_1)\} + (k-1)\alpha_{n,l} \\ &\leqslant (2k+1)(q^r - q^{r+1}) + \{(2k+1)(2r-1) + (k-1)\}\alpha_{n,l}. \end{aligned}$$

С обзиром да функција $g(q) = q^r - q^{r+1}$, $0 \leqslant q \leqslant 1$, има максимум $\left(\dfrac{r}{r+1}\right)^r \dfrac{1}{r+1}$ у тачки $q = \dfrac{r}{r+1}$, даље следи

$$|\Delta| \leqslant (2k+1)\left(\frac{r}{r+1}\right)^r \frac{1}{2r+1} + \{(2k+1)(2r-1) + (k-1)\}\alpha_{n,l}. \tag{3.2.14}$$

Пустимо да $n \to \infty$ и изаберимо l тако да важи $l = l_n = o(n)$. Тада из (3.2.14) добијамо да је

$$\limsup_{n\to\infty} |P\{M_n \leqslant u_n\} - P^k\{M_{[n/k]} \leqslant u_n\}|$$

$$\leqslant (2k+1)\left(\frac{r}{r+1}\right)^r \frac{1}{r+1}. \tag{3.2.15}$$

Коначно ако у (3.2.15) пустимо да $r \to \infty$, добијамо (3.2.5). Релацију (3.2.6) добијамо, ако у (3.2.5) уместо n ставимо nk. ■

ЕКСТРЕМАЛНИ ТИПОВИ ЗА СТАЦИОНАРНЕ НИЗОВЕ

ТЕОРЕМА 3.2.3. [Leadbetter (1974)] *Нека је (X_n) строго стационаран случајан низ, $a_n > 0$ и $b_n \in \mathbf{R}$, где је $n \in \mathbf{N}$, низови константи и $G(x)$ недегенерисана функција расподеле, тако да за сваки $x \in C(G)$ важи*

$$\lim_{n\to\infty} P\{M_n \leqslant a_n x + b_n\} = G(x). \tag{3.2.16}$$

Ако за сваки реалан број x и $u_n = a_n x + b_n$ важи услов $D(u_n)$, онда је $G(x)$ функција расподеле екстремних вредности.

Доказ. На основу теореме 3.2.2 добијамо да за сваки природан број $k \geqslant 2$ и низ $u_n = a_n x + b_n$ важи (3.2.6). Тврђење теореме сада следи из леме 3.2.1. ■