GEOMETRIJA 2
zadaci po kojima se drže vežbe

PODUDARNOST

1. Ako su B_1 i C_1 središta duži CA i BA trougla ABC, onda su prave BC i B_1C_1 paralelne i važi $B_1C_1 = \frac{1}{2}BC$. (**srednja linija trougla**)

2. Ako su A, B, C, D četiri različite tačke i M, N, K, L, P, Q središta duži AB, BC, CD, DA, AC, DB redom, dokazati:

1) MN i KL, MP i QK, NP i QL su međusobno podudarne duži;

2) duži LN, MK, PQ imaju zajedničko središte;

3) svaki od uglova $\sphericalangle PMQ$, $\sphericalangle PNQ$, $\sphericalangle LMN$ podudaran je jednom od uglova kojeg određuju prave AC i BD, BC i AD, AB i CD.

3. Dokazati da se težišne duži trougla seku u tački koja ih deli u odnosu $2:1$. (**težište trougla**)

4. Neka je D podnožje visine iz temena C pravouglog trougla ABC na hipotenuzu AB, a O_1 i O_2 centri krugova upisanih u trouglove CAD i CBD. Dokazati da je simetrala pravog ugla trougla ABC normalna na pravoj O_1O_2.

5. Dokazati da tačke simetrične ortocentru u odnosu na:

a) stranice trougla;

b) središta stranica trougla;

pripadaju krugu opisanom oko tog trougla.

6. Središte opisanog kruga O, ortocentar H i težište T proizvoljnog trougla su kolinearne tačke i važi $HT = 2TO$. Dokazati. (**Ojlerova prava**)

7. Središta stranica, podnožja visina i središta duži odredjenih temenima i ortocentrom trougla pripadaju jednom krugu. Dokazati. (**Ojlerov krug**)

8. Podnožja normala iz proizvoljne tačke kruga opisanog oko nekog trougla, na pravama koje sadrže stranice tog trougla, pripadaju jednoj pravoj. (**Simsonova prava**)

9. Dat je tetivan četvorougao $ABCD$ čije su dijagonale međusobno normalne i seku se u tački S.

a) Prava koja sadrži tačku S i normalna je na pravoj AB sadrži središte duži CD. Dokazati.

b) Ako su A', B', C', D' projekcije tačke S na pravama AB, BC, CD, DA, redom, tada je četvorougao $A'B'C'D'$ tetivan i tangentan. Dokazati.

10. Nad ivicama trougla ABC u spoljašnjosti konstruisani su jednakostranični trouglovi ADB, BEC, CFA. Dokazati da su duži AE, BF, CD međusobno podudarne i da se seku u jednoj tački. (**Toričelijeva tačka**)

11. Medijatrisa stranice i bisektrisa naspramnog ugla trougla seku se u tački koja pripada opisanom krugu tog trougla. Dokazati.

12. Neka su P i Q središta lukova $\widehat{AB}$ i $\widehat{AC}$ kruga opisanog oko trougla ABC i s_a bisektrisa ugla $\sphericalangle BAC$. Dokazati da je $PQ \perp s_a$.

13. Neka su A', N i O podnožje visine iz A, presek bisektrise ugla $\sphericalangle BAC$ sa opisanom krugom trougla ABC $(AB < AC)$ i centar opisanog kruga, dokazati $\sphericalangle A'AE = \sphericalangle ANO = \sphericalangle NAO = \frac{1}{2}(\sphericalangle ABC - \sphericalangle ACB)$.

14. (**Veliki zadatak**) Ako sa A_1, B_1 i C_1 obeležimo središta ivica $BC = a, CA = b, AB = c$ trougla ABC $(b > c)$, sa p poluobim tog trougla, sa $l(O, r)$ opisani krug tog trougla, sa P, Q, R tačke u kojima upisani krug $k(S, \rho)$ dodiruje prave BC, CA, AB, sa P_i, Q_i, R_i $(i = a, b, c)$ tačke u kojima spolja upisani krug $k_i(S_i, \rho_i)$ dodiruje redom prave BC, CA, AB, sa M i N tačke u kojima medijatrisa ivice BC seče krug l, pri čemu je M na luku BAC, sa M' i N' podnožja upravnih iz tačaka M i N na pravoj AB, dokazati da je:

1) $\mathcal{B}(A, P', P_a)$, $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$, $\mathcal{B}(P_c, A, P'_b)$, $\mathcal{B}(P_b, A, P'_c)$;

2) $AQ_a = AR_a = p$, $QQ_a = RR_a = a$, $Q_bQ_c = R_bR_c = a$;

3) $AQ = AR = BR_c = BP_c = CP_b = CQ_b = p - a$;

4) $PP_a = b - c$, $P_bP_c = b + c$;

5) $PA_1 = P_aA_1$, $P_cA_1 = P_bA_1$;

6) $A_1M = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c)$, $A_1N = \frac{1}{2}(\rho_a - \rho)$;

7) $MM' = \frac{1}{2}(\rho_b - \rho_c)$, $NN' = \frac{1}{2}(\rho + \rho_a)$;

8) $AM' = \frac{1}{2}(b - c) = BN'$, $AN' = \frac{1}{2}(b + c) = BM'$;

9) $\rho_a + \rho_b + \rho_c = 4r + \rho$;

10) $NS = NS_a = NB = NC$, $MS_b = MS_c = MB = MC$;

11) $M'N' = b$.

SLIČNOST

1. Ako su E i F tačke u kojima bisektrise unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla $\sphericalangle BAC$ trougla ABC $(AB < AC)$ seku pravu BC dokazati $BE : CE = BF : CF = AB : AC$.

2. Neka su E i F tačke iz prethodnog zadatka. Dokazati:

1) $AS : SE = AS_a : S_aE = (AB + AC) : BC$;

2) $AE : SE = (AB + BC + CA) : BC$, $AE : S_aE = (AB + AC - BC) : BC$;

3) $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = (AC - AB) : BC$.

3. Dokazati (važe oznake iz Velikog zadatka):

1) $SA \cdot SN = 2r\rho$;

2) $S_aA \cdot S_aN = 2r\rho_a$;

3) $S_bA \cdot S_bM = 2r\rho_b$;

4) $S_cA \cdot S_cM = 2r\rho_c$.

4. (**Ptolomejeva teorema**) Ako je $ABCD$ konveksan i tetivan četvorougao, dokazati da važi $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.

5. Ako su a i d ivica i dijagonala pravilnog petougla, izraziti d u funkciji od a. Kako se konstruiše pravilni petougao ivice a?

(**Čevaova teorema**) Ako su P, Q, R redom tačke pravih BC, CA, AB gde su A, B, C tri nekolinearne tačke, tada prave AP, BQ, CR pripadaju jednom pramenu ako i samo ako važi $\dfrac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\dfrac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}\dfrac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1.$

(**Menelajeva teorema**) Tačke P, Q, R pravih određenih stranicama BC, CA, AB trougla ABC su kolinearne ako i samo ako važi $\dfrac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\dfrac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}\dfrac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1.$

6. Ako su P, Q, R tačke u kojima upisani krug trougla ABC dodiruje stranice BC, CA, AB dokazati da su prave AP, BQ, CR konkurentne.

7. Dokazati da se bisektrisa jednog unutrašnjeg i dva spoljašnja ugla trougla ABC seku u jednoj tački.

8. Dokazati da, ukoliko postoje tačke u kojima bisektrise spoljašnjih uglova kod temena A, B i C seku prave određene naspramnim stranicama trougla ABC, one su kolinearne.

9. Dokazati da tačke P, Q, R u kojima tangente opisanog kruga trougla ABC u njegovim temenima seku prave određene naspramnim stranicama, ukoliko postoje, pripadaju jednoj pravoj.

Def. Neka su P, Q, R, S četiri razne kolinearne tačke. Par tačaka (P, Q) je harmonijski spregnut sa parom (R, S) ako važi $\dfrac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = -\dfrac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}}$. Tada pišemo $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$.

Def. Prave a, b, c, d jednog pramena su harmonijski spregnute ako postoji prava p koja ih seče u harmonijski spregnutim tačkama. Tada pišemo $\mathcal{H}(a, b; c, d)$. Ova osobina ne zavisi od izbora prave p.

<u>*Osobine:*</u>

- Ako važi $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$ tada važi i $\mathcal{H}(Q, P; R, S)$, $\mathcal{H}(Q, P; S, R)$, $\mathcal{H}(R, S; P, Q)$.
- Ako su P, Q, R tri kolinearne tačke i R nije središte duži PQ, tada postoji jedinstvena tačka S takva da je $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$.
- $\mathcal{H}(P, Q; R, S) \Rightarrow \mathcal{B}(P, R, Q) \veebar \mathcal{B}(P, S, Q)$.
- Ako su a, b, c, d konkurentne prave i $c \perp d$ važi: $\mathcal{H}(a, b; c, d) \Leftrightarrow c$ i d su simetrale uglova određenih pravama a i b.

10. Važi $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$ ako i samo ako postoje četiri tačke A, B, C, D takve da važi $AB \cap CD = \{P\}$, $BC \cap AD = \{Q\}$, $PQ \cap AC = \{R\}$, $PQ \cap BD = \{S\}$.

11. Ako su A, B, C, D razne kolinearne tačke, a O središte duži AB, tada važi $\mathcal{H}(A, B; C, D) \Leftrightarrow AO^2 = OC \cdot OD$.

12. Ako su A, B, C, D razne tačke prave p, O tačka van te prave, E i F tačke u kojima prava koja sadrži tačku B i paralelna je OA seče OC i OD, dokazati da važi $\mathcal{H}(A, B; C, D) \Leftrightarrow B$ je središte EF.

13. Neka su $\overline{S}, \overline{S_a}, \overline{S_b}, \overline{S_c}$ projekcije tačaka S, S_a, S_b, S_c na pravu odredjenu visinom AA' trougla ABC, a $\overline{E}$ projekcija tačke E na pravu AC. Dokazati:

1) $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$, $\mathcal{H}(A, A'; \overline{S}, \overline{S_a})$, $\mathcal{H}(A, \overline{E}; Q, Q_a)$, $\mathcal{H}(A', E; P, P_a)$;

2) $\mathcal{H}(A, F; S_b, S_c)$, $\mathcal{H}(A', F; P_b, P_c)$, $\mathcal{H}(A, A'; \overline{S_b}, \overline{S_c})$.

14. (**Apolonijev krug**) Odrediti skup svih tačaka u ravni kojima su rastojanja od dveju datih tačaka srazmerna datim nepodudarnim dužima.

Def. Ako neka prava koja sadrži tačku P seče krug $k(O,r)$ u tačkama A i B, tada je *potencija* tačke P u odnosu na krug k data sa $p(P,k) = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = PO^2 - r^2$ i ne zavisi od izbora prave. Potencija tačke P je veća, manja ili jednaka nuli u zavisnosti da li se tačka nalazi u spoljašnjosti ili unutrašnjosti kruga ili na krugu.

Def. Geometrijsko mesto tačaka ravni koje imaju jednake potencije u odnosu na dva data kruga $k_1(O_1,r_1)$ i $k_2(O_2,r_2)$ je prava koja se zove *radikalna* ili *potencijalna osa.*

Radikalna osa je upravna na pravoj O_1O_2. Radikalne ose triju krugova neke ravni pripadaju jednom pramenu.

15. Neka su A,B,C,D kolinearne tačke takve da važi $\mathcal{B}(A,C,B,D)$ i neka je k krug nad prečnikom AB i l bilo koji krug koji sadrži tačke C,D. Dokazati da važi $\mathcal{H}(A,B;C,D) \Leftrightarrow k \perp l$.

16. Ako je $l(O,r)$ opisan krug, $k(S,\rho)$ upisani krug i $k_a(S_a,\rho_a)$ spolja upisani krug koji dodiruje stranicu BC datog trougla ABC, dokazati da je $OS^2 = r^2 - 2r\rho$ i $OS_a^2 = r^2 + 2r\rho_a$.

17. Prava određena visinom AD trougla ABC predstavlja radikalnu osu krugova kojima su prečnici težišne linije BB' i CC' tog trougla.

KONSTRUKTIVNI ZADACI

1. Konstruisati trougao ABC ako su zadati sledeći elementi:

1) t_a, t_b, t_c;
2) β, γ, p;
3) $\alpha, a, b+c$;
4) $\beta, h_c, b \pm c$;
5) $t_a, h_b, b \pm c$;
6) $\beta - \gamma, b, c$;
7) $\beta - \gamma, l_a, \rho$;
8) $\alpha, b-c, \rho_a$;
9) a, ρ_b, ρ_c;
10) α, ρ, ρ_a;
11) $b-c, h_a, \rho$.

2. Date su tačke A_1, S, F. Konstruisati trougao ABC ako je A_1 središte BC, S centar upisanog kruga, a F presek simetrale spoljašnjeg ugla u temenu A i prave BC.

3. Konstruisati tetivni četvorougao takav da su mu ivice podudarne datim dužima.

INVERZIJA

Def. Neka je $k(O,r)$ proizvoljni krug ravni E^2. *Inverzija u odnosu na krug k* je preslikavanje $\psi_k : E^2\backslash\{O\} \to E^2\backslash\{O\}$ kojom se tačka P slika u tačku P' takvu da P i P' pripadaju istoj polupravoj sa temenom u O i važi $OP \cdot OP' = r^2$.

<u>*Osobine*</u>

- $\psi_k^2 = Id$.
- $\psi_k(P) = P \Leftrightarrow P \in k$.
- ψ_k slika unutrašnjost kruga u spoljašnjost i obrnuto.
- Ako ψ_k slika A u A' i ako je PQ prečnik kruga k takav da su P,Q,A,A' kolinearne, onda važi $\mathcal{H}(P,Q;A,A')$.
- Ako prava p sadrži tačku O, tada se $p\backslash\{O\}$slika u $p\backslash\{O\}$.

- Ako prava p ne sadrži tačku O, onda se slika u $l\backslash\{O\}$ gde je l krug koji sadrži O.
- Ako krug l sadrži tačku O, onda se $l\backslash\{O\}$ slika u pravu koja ne sadrži O.
- Ako krug l ne sadrži tačku O slika se u krug l_1 koji takodje ne sadrži O. Pri tom se centar kruga l NE PRESLIKAVA u centar kruga l_1.
- $\psi_k(A)\psi_k(B) = \frac{r^2}{OA\cdot OB}AB$.
- ψ_k čuva uglove između krivih.

1. Ako se krugovi k_1 i k_2 dodiruju u centru inverzije, tada se inverzijom slikaju u dve paralelne prave. Dokazati.

2. Neka se inverzijom ψ_k tačka A koja ne pripada krugu k slika u A' i neka je l proizvoljan krug koji sadrži A i A'. Dokazati da je $l \perp k$.

3. Neka je O centar opisanog kruga l trougla ABC. Ako su B' i C' tačke polupravih AB i AC takve da je $AB \cdot A'B' = AC \cdot A'C'$ dokazati da je $OA \perp B'C'$.

4. Neka je $ABPQ$ netetivni četvorougao. Dokazati da je ugao između krugova opisanih oko trouglova ABP i ABQ jednak uglu između krugova opisanih oko trouglova PQA i PQB.

5. Neka se krugovi k_1, k_2, k_3 međusobno dodiruju u tačkama P, Q, R. Dokazati da je krug opisan oko trougla PQR ortogonalan na sva tri kruga.

6. Krugovi k_1, k_2, k_3 su međusobno ortogonalni, pri čemu se k_1 i k_2 seku u tačkama A i B, k_2 i k_3 u tačkama C i D, k_3 i k_1 u tačkama E i F. Dokazati da se krugovi opisani oko trouglova ACE i ADF dodiruju u tački A.

7. U ravni su data četiri kruga od kojih svaki dodiruje tačno dva kruga od preostalih. Dokazati da su dodirne tačke kolinearne ili konciklične.

8. Konstruisati krug k koji sadrži dve date tačke A i B i dodiruje datu pravu p.

9. Konstruisati krug k koji sadrži datu tačku A i dodiruje date krugove k_1 i k_2.

10. Konstruisati krug koji spolja dodiruje tri data kruga k_1, k_2, k_3.

IZOMETRIJSKE TRANSFORMACIJE RAVNI

1. Dokazati: $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \Leftrightarrow p = q \vee p \perp q$.

2. Dokazati: $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ ako i samo ako su p, q, r prave jednog pramena.

3. Dokazati: $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_B \Leftrightarrow AB \perp p$.

4. Neka je $ABCD$ romb takav da je $\sphericalangle BAD = 60°$ i neka prava p seče redom stranice AB i BC u tačkama M i N tako da je zbir duži BM i BN jednak stranici romba. Dokazati da je trougao DMN pravilan.

5. Neka je $ABCDE$ petougao upisan u krug takav da je $BC \parallel DE$ i $CD \parallel EA$. Dokazati da D pripada medijatrisi stranice AB.

6. Neka je u ravni $\mathbb{E}^2$ dat trougao ABC i neka su B', C' tačke pravih AB i AC takve da važi $\mathcal{B}(A, B, B')$ i $\mathcal{B}(A, C, C')$. Ako je P_a tačka u kojoj spolja upisani krug koji odgovara temenu A dodiruje stranicu BC tog trougla, dokazati da je $\mathcal{R}_{C,\sphericalangle C'CB} \circ \mathcal{R}_{A,\sphericalangle BAC} \circ \mathcal{R}_{B,\sphericalangle CBB'} = \mathcal{S}_{Pa}$.

7. Neka je t tangenta opisanog kruga trougla ABC u temenu A. Dokazati da važi $\mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_t$, gde je $\mathcal{G}$ klizajuća simetrija.

8. Dokazati da je četvorougao $ABCD$ tetivan ako i samo ako važi $\mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{E}$.

9. Data su dva kruga koji imaju presečnu tačku A. Konstruisati pravu koja

a) sadrži A;

b) je paralelna datoj pravoj p;

i na kojoj dati krugovi odsecaju podudarne duži.

1. Konstruisati trougao ABC takav da su date nekolinearne tačke O_a, O_b i O_c središta kvadrata konstruisanih spolja nad njegovim ivicama BC, CA i AB.

STEREOMETRIJA

1. a) Dokazati da u prostoru $\mathbb{E}^3$ postoji jedinstvena prava koja sadrži datu tačku O i upravna je na svakoj od dveju mimoilaznih pravih p i q.

b) Ako su P i Q podnožja zajedničke normale dveju mimoilaznih pravih p i q, dokazati da je duž PQ kraća od svih ostalih duži koje spajaju tačke pravih p i q.

2. Zbir dve stranice triedra veći je od treće. Dokazati.

3. Ravni od kojih je svaka određena ivicom i simetralom naspramne stranice triedra imaju zajedničku pravu. Dokazati.

4. Neka su strane triedra jednake redom $60°, 45°, 45°$. Dokazati da je diedar naspram najveće stranice prav.

5. Dokazati da se oko svakog tetraedra $ABCD$ u prostoru $\mathbb{E}^3$ može opisati sfera, kao i da se u svaki tetraedar može upisati sfera.

6. a) Duži određene središtima naspramnih ivica trostrane piramide (tetraedra) seku se u jednoj tački koja ih polovi. Dokazati. (**Težište tetraedra**)

b) Dokazati da težište tetraedra deli duži određene temenima i težištima naspramnih strana u odnosu $3:1$.

7. a) Dve naspramne ivice nekog tetraedra su međusobno podudarne ako i samo ako su duži određene središtima ostalih dvaju parova naspramnih ivica međusobno normalne.

b) Dve naspramne ivice tetraedra su normalne ako i samo ako su duži određene središtima ostalih dvaju parova naspramnih ivica međusobno podudarne.

8. Dokazati da je prava određena središtima stranica AC i BD tetraedra $ABCD$ ujedno i njihova zajednička normala ako i samo ako je $AB = CD$ i $AD = BC$.

Def. Tetraedar $ABCD$ je *ortogonalan* ako važi $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$.

9. Visine AA' i BB' tetraedra $ABCD$ se seku ako i samo ako je $AB \perp CD$. Dokazati.

10. Dokazati da podnožja visina iz temena tetraedra predstavljaju ortocentre naspramnih pljosni ako i samo ako je tetraedar ortogonalan.

IZOMETRIJSKE TRANSFORMACIJE PROSTORA

1. Dokazati: $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_O = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_\pi \Leftrightarrow O \in \pi$.

2. Dokazati da je kompozicija neparnog broja centralnih simetrija prostora ponovo centralna simetrija.

3. Ako su A, B, C tri tačke ravni π, dokazati da važi $\mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_\pi$.

4. Odrediti tip izometrije $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} \circ \mathcal{S}_\pi$.

5. Dokazati da je kompozicija tri ravanske refleksije kojima su osnove određene bočnim pljosnima trostrane prizme $ABCA'B'C'$ klizajuća refleksija tog prostora.

6. Odrediti tip i komponente izometrije koja predstavlja kompoziciju dveju osnih refleksija $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$ euklidskog prostora, u zavisnosti od uzajamnog položaja pravih p i q.

7. Neka su OP, OQ, OR tri međusobno normalne duži prostora. Dokazati da je kompozicija $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{OR}} \circ \mathcal{Z}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{Z}_{\overrightarrow{OP}}$ translacija.

8. Dokazati da je u euklidskom prostoru kompozicija sastavljena od tri ravanske refleksije kojima su osnove određene pljosnima triedra osnorotaciona refleksija.

HIPERBOLIČKA GEOMETRIJA

1. Prave određene osnovicom i protivosnovicom Sakerijevog četvorougla su hiperparalelne. Dokazati.

2. Uglovi na protivosnovici Sakerijevog četvorougla su podudarni i oštri. Dokazati.

3. Dokazati da su dva Lambertova četvorougla $ABCD$ i $A'B'C'D'$ sa oštrim uglovima D i D' podudarna ako je:

a) $AB = A'B', BC = B'C'$;	**d**) $AD = A'D',\ CD = C'D'$;
b) $AB = A'B',\ AD = A'D'$;	**e**) $AD = A'D', \sphericalangle D = \sphericalangle D'$;
c) $AD = A'D',\ BC = B'C'$;	**f**) $AB = A'B', \sphericalangle D = \sphericalangle D'$.

4. Dokazati da su dva Sakerijeva četvorougla $ABCD$ i $A'B'C'D'$ sa osnovama AB i $A'B'$ podudarna ako je:

a) $AB = A'B', BC = B'C'$;	**d**) $AB = A'B', \sphericalangle C = \sphericalangle C'$;
b) $AB = A'B', CD = C'D'$;	**e**) $BC = B'C', \sphericalangle C = \sphericalangle C'$;
c) $BC = B'C', CD = C'D'$;	**f**) $CD = C'D', \sphericalangle C = \sphericalangle C'$.

5. Ako su tačke P i Q središta stranica AB i AC trougla ABC, dokazati da su prave BC i PQ među sobom hiperparalelne.

6. Ako su A, B, C tri razne tačke neke prave l i O tačka izvan te prave, dokazati da središta A', B', C' duži OA, OB, OC ne pripadaju jednoj pravoj.

7. Dokazati da je u Sakerijevom četvorouglu protivosnovica veća od osnovice.

8. Ako su P i Q središta stranica AB i AC trougla ABC, dokazati da je $PQ < \frac{1}{2}BC$.

9. Neka je A_1 središte hipotenuze BC pravouglog trougla ABC. Dokazati da je duž AA_1 manja od polovine hipotenuze.

10. Ako je visina ekvidistante veća od nule tada ta ekvidistanta nije prava. Dokazati.

11. Prave p i q seku se u tački S. Odrediti pravu a paralelnu pravoj q u određenom smeru i normalnu na pravoj p.

12. Prave p i q su paralelne. Odrediti pravu a paralelnu pravoj q u određenom smeru i normalnu na pravoj p.

13. Prave p i q su hiperparalelne. Odrediti pravu a paralelnu pravoj q u određenom smeru i normalnu na pravoj p.

14. Neka su a, b i c međusobno paralelne prave, ali ne sve u istom smeru. Neka su b' i c' upravne iz tačke A prave a na pravama b i c. Odrediti ugao između pravih b' i c'.

15. Dva razna parabolička pramena imaju zajedničku pravu. Dokazati.

16. Neka su A, B, C i D tačke takve da su redom poluprave AB i DC, odnosno BC i AD paralelne. Dokazati da su simetrale unutrašnjih uglova kod temena A i C i spoljašnjih uglova kod temena B i D prave istog pramena.

17. Dokazati da za tri nekolinearne tačke A, B, C važi $\Pi(\frac{BC}{2}) < \frac{1}{2}(\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB + \sphericalangle BAC)$.

18. Ako je u ravni Lobačevskog dat trougao ABC kod koga je $\sphericalangle C$ prav, tj. $\sphericalangle C = R$, zatim $\sphericalangle A = \Pi(a')$, $\sphericalangle B = \Pi(b')$, $BC = a$ i $AB = c$, dokazati da je:

a) $\sphericalangle A = \Pi(b) - \Pi(c + b')$;

b) $\sphericalangle A = \begin{cases} \Pi(c - b') - \Pi(b) & \text{, za } b' < c \\ 2R - \Pi(b) - \Pi(b' - c), & \text{za } b' > c \end{cases}$;

c) $\sphericalangle A = \begin{cases} \frac{1}{2}\big[\Pi(c - b') - \Pi(c + b')\big] & \text{, za } b' < c \\ R - \frac{1}{2}\big[\Pi(b' + c) + \Pi(b' - c)\big], & \text{za } b' > c \end{cases}$;

d) $\Pi(b) = \begin{cases} \frac{1}{2}\big[\Pi(c + b') + \Pi(c - b')\big] & \text{, za } b' < c \\ R - \frac{1}{2}\big[\Pi(b' + c) - \Pi(b' - c)\big], & \text{za } b' > c \end{cases}$;

e) $\Pi(a' - b) + \Pi(a + b') = R, \quad \Pi(b' - a) + \Pi(b + a') = R.$

POENKAREOV DISK MODEL

1. U Poenkareovom disk modelu hiperboličke ravni date su h-prava a i h-tačka A. Odrediti h-pravu n koja sadrži tačku A i upravna je na pravu a.

2. U Poenkareovom disk modelu date su tačke A i B. Odrediti h-simetralu duži AB.

3. U Poenkareovom disk modelu date su tačke X i Y. Konstruisati h-krug l sa centrom u tački X koji sadrži tačku Y.

4. U Poenkareovom disk modelu date su dve prave koje se seku. Odrediti h-bisektrisu ugla kojeg određuju.

5. U Poenkareovom disk modelu konstruisati h-duž mere $\Pi^{-1}(\frac{R}{2})$.